



نظریهٔ زبان‌ها و خودکاره‌ها
ویژگی‌های دستور مستقل از متن

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

قضیه

زبان‌های مام تحت عمل اجتماع، اتصال، بستار ستاره، معکوس بسته‌اند.

اثبات

دو دستور $G_1(V_1, \Sigma_1, S_1, R_1)$ و $G_2(V_2, \Sigma_2, S_2, R_2)$ و $V_1 \cap V_2 = \phi$

اثبات بسته بودن تحت عمل اجتماع

$$G_U(V_1 \cup V_2 \cup \{S_U\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, S_U, R_U)$$

$$R_U = R_1 \cup R_2 \cup \{S_U \rightarrow S_2 | S_1\}$$

$$S_U \Rightarrow S_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} w, w \in L_1$$

$$S_U \Rightarrow S_2 \stackrel{*}{\Rightarrow} w, w \in L_2$$

G_U مام است و $L(G_U) = L_1 \cup L_2$

اثبات بسته بودن تحت عمل اتصال

$$G^\circ(V_1 \cup V_2 \cup \{S^\circ\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, S^\circ, R^\circ)$$

$$R^\circ = R_1 \cup R_2 \cup \{S^\circ \rightarrow S_1 S_2\}$$

$L(G^\circ) = L_1 L_2$ و G° مام است

اثبات بسته بودن تحت عمل بستار ستاره

$$G_*(V_1 \cup \{S_*\}, \Sigma_1, S_*, R_*)$$

$$R_* = R_1 \cup \{S_* \rightarrow S_1 S_* | \epsilon\}$$

$L(G_*) = L(G_1)^*$ و G_* مام است

اثبات بسته بودن تحت عمل معکوس

H معکوس G

$$G: A \rightarrow w$$

$$H: A \rightarrow w^r$$

$$A \overset{*}{\Rightarrow}_G w \Leftrightarrow A \overset{*}{\Rightarrow}_H w^r$$

$$A \overset{0}{\Rightarrow}_G w \Leftrightarrow A \overset{0}{\Rightarrow}_H w^r \text{ پایه استقرا}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } A \overset{*}{\Rightarrow}_G w_1 B w_2 \Leftrightarrow A \overset{*}{\Rightarrow}_H w_2^r B^r w_1^r \\ G: B \rightarrow u \\ H: B \rightarrow u^r \end{array} \right\} A \overset{*}{\Rightarrow}_G w_1 u w_2 \Leftrightarrow A \overset{*}{\Rightarrow}_H w_2^r u^r w_1^r$$

اثبات بسته بودن تحت عمل معکوس - اثبات دوم

صورت چامسکی

$$\epsilon \rightarrow \epsilon^r$$

$$A \rightarrow BC \implies A \rightarrow CB$$

$$A \rightarrow a \implies A \rightarrow a$$

قضیه بسته نبودن تحت اشتراک و متمم

زبان‌های مستقل از متن تحت اشتراک و متمم‌گیری بسته نیستند.

اثبات

$$L_1 = \{a^n b^n c^m : n \geq 0, m \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^m : n \geq 0, m \geq 0\}$$

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$$

اثبات متمم

$$\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2$$

قضیه

اگر زبانی مستقل از متن و زبانی منظم باشد، آن گاه اشتراک آن‌ها مستقل از متن است.
اثبات بعد از مطالعه خودکاره پشت‌های

مثال

امام $L = \{a^n b^n : n \geq 0, n \neq 50\}$ است؟

اشتراک زمام با زم، زمام است.

$L_1 = \{a^{50} b^{50}\}$ و منظم \bar{L}_1 منظم

امام $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

$\bar{L}_1 \cap L$

اشتراک زمام با زم، زمام است.

مثال

$L = \{w \in \{a,b,c\}^* : \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$ مام است؟

اشتراک زمام با زم، زمام است.

زبان منظم $L_1 = \{a^*b^*c^*\}$

$$L_1 \cap L = \{a^n b^n c^n\}$$

پس مام نیست

مثال

مکمل $L = \{w \in \{a,b,c\}^* : \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$ مام است؟

مکمل شامل اجتماع چهار حالت است

$$\#_a(w) > \#_b(w)$$

$$\#_a(w) < \#_b(w)$$

$$\#_a(w) < \#_c(w)$$

$$\#_a(w) > \#_c(w)$$

همه حالات مام هستند و اجتماع زبان‌های مام نیز زبانی مام است.

قضیه مربوط به زبان‌های خطی

خانواده زبان‌های خطی تحت عمل اجتماع، معکوس بسته است
خانواده زبان‌های خطی تحت اشتراک، اتصال، بستار ستاره بسته نیست.

$$S_0 \rightarrow S_1 S_2$$

منابع

[سیپسرا]

[لینزا]

“